Matematica

# Anno 5

## Funzioni continue: teoremi

## Introduzione

In questa lezione impareremo alcuni importanti teoremi sulle funzioni continue.

Al termine di questa lezione sarai in grado di descrivere i teoremi:

- della **continuità** delle **funzioni inverse**
- di **Weierstrass**
- degli **zeri**
- dei **valori intermedi**

In questa lezione impareremo alcuni importanti teoremi sulle funzioni continue.
Alla fine di questa lezione sarai in grado di:

- descrivere il teorema della continuità delle funzioni inverse;
- descrivere il teorema di Weierstrass;
- descrivere il teorema degli zeri;
- descrivere il teorema dei valori intermedi.



Note

**Teorema sulla continuità della funzione inversa**

Se una funzione $f$: $A \to B$ è biiettiva, esiste la **funzione inversa** di $f$ che è indicata con $f^{-1}$: $B \to A$.

Data una funzione $f$: $A \to B$, con $A$, $B \subset \mathbf{R}$, se $f$ è continua e strettamente crescente (o strettamente decrescente) in $A$, allora esiste la sua **funzione inversa** $f^{-1}$, definita in $f(A)$, che risulta continua e strettamente crescente (o strettamente decrescente).

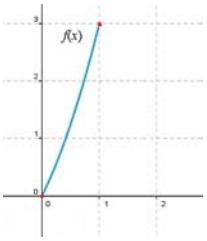
**Esempio**:

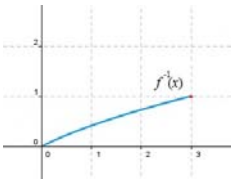
Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 + 2x$ definita in [0,1] a valori in [0,3].

Dato che $f$ è continua e strettamente crescente in [0,1], esiste la funzione inversa

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$$

continua e strettamente crescente.




Ricordiamo che se una funzione $f$:$A \to B$ è biiettiva, allora esiste la funzione inversa di $f$ che è indicata con $f^{-1}$:$B \to A$. Riguardo la continuità della funzione inversa $f^{-1}$ esiste il seguente teorema: data una funzione $f$ :$A \to B$, con $A$ e $B$ sottoinsiemi di $R$, se $f$ è continua e strettamente crescente (o strettamente decrescente) in $A$, allora esiste la sua funzione inversa $f^{-1}$ definita in $f(A)$ che risulta continua e strettamente crescente (o strettamente decrescente).

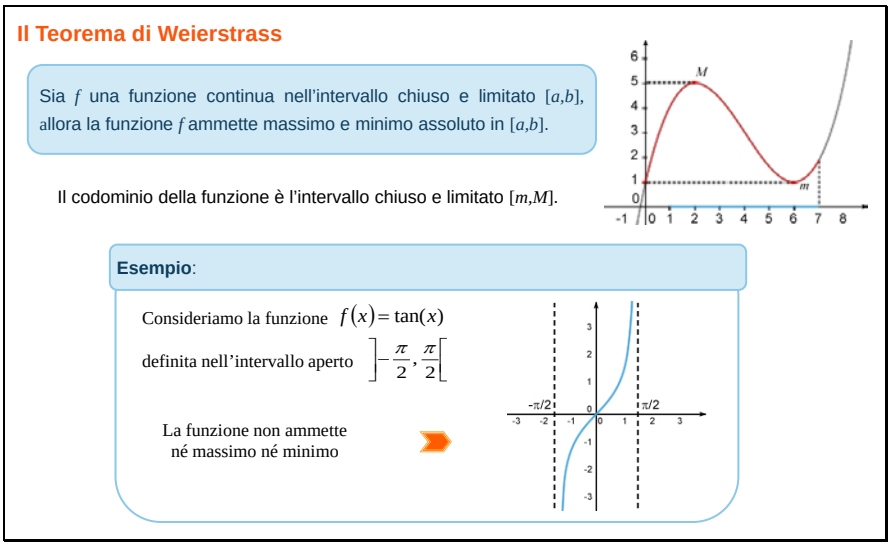
Possiamo illustrare questo teorema con il seguente esempio: consideriamo la funzione $f(x)=x^2+2x$ definita nell'intervallo [0,1] a valori nell'intervallo [0,3].

La funzione risulta essere continua e strettamente crescente nel suo insieme di definizione quindi esiste la sua funzione inversa.

Questa è $f^{-1}(x)=\sqrt{(x+1)} -1$ definita nell'intervallo [0,3] e risulta anch'essa continua e strettamente crescente.



Note

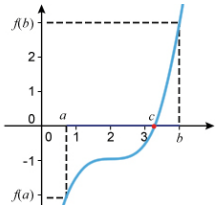



Introduciamo adesso tre teoremi fondamentali relativi alle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato.
Il primo di questi è il teorema di Weierstrass: sia *f* una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato [*a*,*b*]. Allora, la funzione *f* ammette in [*a,b*] massimo e minimo assoluto.
Come si osserva dal grafico *M* è il massimo assoluto e *m* è il minimo assoluto in [*a*,*b*].
Da questo teorema si può dedurre che il codominio della funzione risulterà essere l'intervallo chiuso e limitato [m,M].
Se il dominio *D* non dovesse essere un intervallo chiuso e limitato, non è detto che la funzione ammetta massimo e minimo assoluti in *D*. Vediamo un esempio.
Consideriamo la funzione tangente. Essa risulta continua nell'intervallo aperto ]-π/2,π/2[ ma, come si può vedere dal suo grafico, non ammette né massimo né minimo.

**Teorema dell'esistenza degli zeri**

Sia $f$ una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e tale che $f(a)\cdot f(b)<0$, allora esiste almeno un punto $c\in]a,b[$ in cui la funzione si annulla.

Il teorema afferma che il grafico della funzione taglia l'asse delle ascisse in almeno un punto compreso tra gli estremi $a$ e $b$.



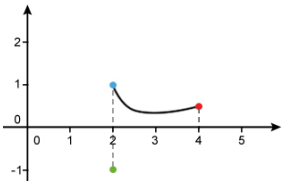

**Esempio**:

La funzione

$$\begin{cases} f(x)<0 & \text{se } x=2 \\ f(x)>0 & \text{se } x\in\,]2,4] \end{cases}$$

Non è continua in [2, 4] e $f(2)\cdot f(4)<0$.

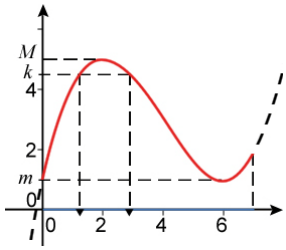
Il teorema non è valido, infatti la funzione non si annulla mai.




Il secondo teorema è il teorema dell'esistenza degli zeri. Sia *f* una funzione continua nell'intervallo [*a,b*] chiuso e limitato e si supponga che il segno di *f*(*a*) sia discorde dal segno di *f*(*b*), ovvero che il prodotto *f(a)·f(b)* sia negativo, allora esiste almeno un punto in ]*a,b*[ in cui la funzione *f* si annulla.
La figura mostra quanto espresso nell'enunciato del teorema. Dal punto di vista geometrico il teorema afferma che il grafico della funzione taglia l'asse delle ascisse in almeno un punto compreso tra gli estremi *a* e *b*.
Anche in questo caso se non tutte le ipotesi sono verificate, la tesi del teorema potrebbe non essere verificata.
Come esempio consideriamo quindi la funzione mostrata nel grafico che risulta continua nell'intervallo aperto a sinistra ]2,4] con valori sempre positivi, mentre nel punto *x*=2 assume un valore negativo.
Pur assumendo agli estremi valori discordi, la discontinuità nel punto 2 non garantisce l'esistenza di un punto nell'intervallo aperto ]2,4[ in cui la funzione si annulla.

**Teorema dei valori intermedi**

Se $f$ è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, allora $f$ assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo assoluto.

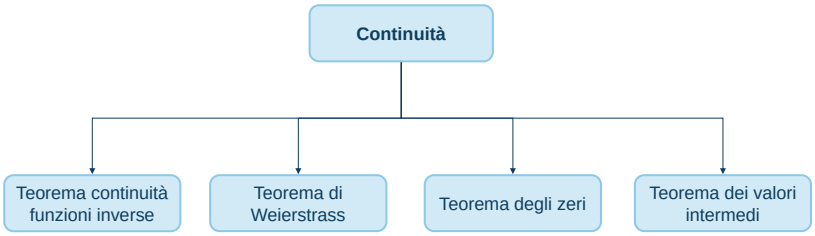



Detti $M$ e $m$ rispettivamente il massimo assoluto e il minimo assoluto di $f$ nell'intervallo $[a,b]$ la funzione assume, in [a,b], tutti e soli i valori compresi nell'intervallo [m,M].

Scelto un qualsiasi valore $k$, $m \le k \le M$ esiste almeno un punto $x_0 \in [a,b]$ per cui risulta: $f(x_0)=k$.

Enunciamo infine il teorema dei valori intermedi.
Se *f* è una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato [*a,b*] allora la funzione assume tutti i valori compresi tra il suo minimo e il suo massimo assoluto.
Chiamiamo *M* e *m* rispettivamente il massimo assoluto e il minimo assoluto di *f* nell'intervallo [*a*,*b*]. Il teorema dei valori intermedi afferma che la funzione f(x), al variare di x nell'intervallo [a,b], assume tutti e soli i valori compresi nell'intervallo [m,M].
Questo vuol dire che scelto un qualsiasi valore *k* strettamente compreso tra *m* e *M*, esiste almeno un punto $x_0$ appartenente all'intervallo di definizione della funzione per cui risulta $f(x_0)=k$.

**Conclusione**




In questa lezione abbiamo introdotto alcuni teoremi legati alla continuità delle funzioni.
In particolare abbiamo studiato il Teorema della continuità delle funzioni inverse che afferma la continuità della funzione inversa di una funzione continua, biiettiva e strettamente monotona, definita in un intervallo chiuso e limitato.
In seguito abbiamo introdotto il Teorema di Weierstrass che garantisce l'esistenza di un massimo e minimo assoluto per ogni funzione continua in un intervallo chiuso e limitato.
Abbiamo studiato il Teorema degli zeri che dimostra la presenza di almeno uno zero per funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato e con valori discordi agli estremi dell'intervallo.
Infine abbiamo studiato il Teorema dei valori intermedi che può essere considerato una generalizzazione del teorema precedente poiché asserisce che le funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato assumono tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo assoluto.