Matematica

Anno 4

Archi e angoli

Introduzione

In questa lezione illustreremo gli **angoli** e gli **archi**.

In particolare, parleremo di:
- angoli e archi **orientati**
- metodi di **misurazione** degli angoli in funzione dell'unità di misura scelta

Al termine della lezione sarai in grado di:
- descrivere angoli e archi orientati
- descrivere la misura degli angoli
- applicare la trasformazione da gradi a radianti e viceversa

In questa lezione illustreremo gli angoli e gli archi.
Daremo la definizione di archi e di angoli, soffermandoci sugli archi e angoli orientati.
Illustreremo, inoltre, misurazione degli angoli in funzione dell'unità di misura scelta.
Al termine della lezione sarai in grado di:
- descrivere angoli e archi orientati;
- descrivere la misura degli angoli;
- applicare la trasformazione da gradi a radianti e viceversa.

Note

Angoli e archi

Si definisce **angolo** ciascuna delle due parti del piano in cui esso è diviso da due semirette uscenti da uno stesso punto O (incluse queste due semirette).

Si dice **arco** la parte di circonferenza inclusa in un angolo al centro della circonferenza stessa.

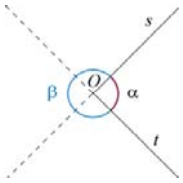


Figura 1: Esempio di **angolo**.
Il punto O si chiama **vertice** dell'angolo.
Le semirette r ed s, si chiamano **lati** dell'angolo.
L'angolo α é **convesso**, l'angolo β é **concavo**

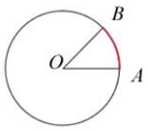


Figura 2: Esempio di **arco**.
La **linea curva rossa** è l'intersezione tra la circonferenza di centro O e l'angolo convesso $A\hat{O}B$
La linea rossa è detta **arco sotteso** dall'angolo $A\hat{O}B$

Definiamo ora gli angoli e gli archi.
Si definisce angolo ciascuna delle due parti del piano in cui esso è diviso da due semirette uscenti da uno stesso punto *O* (incluse queste due semirette).
Si dice arco la parte di circonferenza inclusa in un angolo al centro della circonferenza stessa.
La figura 1 mostra un esempio di angolo. Il punto *O* si chiama vertice dell'angolo. Le semirette *r* ed *s*, si chiamano lati dell'angolo.
Un angolo si dice concavo quando contiene i prolungamenti dei suoi lati, in caso contrario si dice convesso. L'angolo *α* é pertanto un angolo convesso e l'angolo *β* é un angolo concavo.
La figura 2 mostra un esempio di arco. La linea curva rossa è l'intersezione tra la circonferenza di centro *O* e l'angolo convesso *AÔB*. La linea rossa é detta arco sotteso dall'angolo *AÔB*.

Angoli e archi orientati

Un **angolo** si dice **orientato** quando viene stabilito un ordinamento tra i suoi lati.

L'**angolo** orientato può essere pensato come generato dalla **rotazione** del **primo lato** (lato origine) **verso** il **secondo** (lato termine), fino alla sovrapposizione dei due.

Figura 1

Figura 2

a → lato origine b → lato termine

Un angolo orientato si dice **positivo** quando é descritto dal lato origine a tramite una rotazione antioraria attorno al suo vertice (figura 1)

Si dice **negativo** quando é descritto dal lato origine tramite una rotazione oraria attorno al vertice (figura 2).

Definiamo ora gli angoli e gli archi orientati.
Un angolo si dice orientato quando viene stabilito un ordinamento tra i suoi lati.
In tal caso l'angolo può essere pensato come generato dalla rotazione del primo lato (lato origine) verso il secondo (lato termine), fino alla sovrapposizione dei due.
Le figure mostrano due esempi di angoli orientati. In queste due figure, sia *a* il primo lato e *b* il lato termine.
Un angolo orientato si dice positivo quando è descritto dal lato origine tramite una rotazione antioraria attorno al suo vertice (figura 1).
Si dice invece negativo quando è descritto dal lato origine tramite una rotazione oraria attorno al vertice (figura 2).

Misura degli angoli

Il **grado** è la 360ma parte dell'angolo giro. La 60ma parte del grado si dice **minuto primo** e la 60ma parte del minuto primo si dice **minuto secondo**.

Il **radiante** corrisponde, invece, all'angolo al centro di una circonferenza di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio della circonferenza.

Esempio:

Convertiamo in gradi 10 27'36''
36'':60=0,6'
27'+0,6'=27,6':60=0,46
10 +0,46 =10,46

Convertiamo in secondi 20
20 ·60=1200'
1200'·60=7200''

Per **misurare** gli **archi** si assume come unità di misura l'arco il cui angolo al centro corrisponde all'unità di misura degli angoli:

Arco **grado** → l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un grado

Arco **radiante** → l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un radiante

Per misurare un angolo bisogna fissare un'unità di misura. Le unità di misura più usate sono il grado e il radiante.
Il grado è la 360ma parte dell'angolo giro. La 60ma parte del grado si dice minuto primo e la 60ma parte del minuto primo si dice minuto secondo.
Questo sistema, in base 60, é detto sessagesimale ed è utilizzato, per esempio, per esprimere le misure di latitudini e longitudini.
Il radiante corrisponde, invece, all'angolo al centro di una circonferenza di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio della circonferenza.
Facciamo ora qualche esempio di conversione da gradi a minuti primi/minuti secondi e viceversa.
Convertiamo l'angolo 10˚27'36˝ in gradi. Convertiamo prima i 36 minuti secondi, in minuti primi dividendo per 60. Sommiamo il risultato della divisione a 27' e dividiamo per 60. Otteniamo così 0,46˚ che sommati ai 10˚di partenza daranno 10,46˚.
Convertiamo ora 20° in minuti secondi. Moltiplicando per 3600 si ottiene il risultato, 7200 minuti secondi.
Anche per misurare gli archi occorre fissare un unità di misura. A tal scopo si assume come unità di misura l'arco il cui angolo al centro corrisponde all'unità di misura degli angoli.
Così avremo: l'arco grado, che è l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un grado;e l'arco radiante, che è l'arco di circonferenza che corrisponde all'angolo al centro di un radiante.

Trasformazione da gradi a radianti e viceversa

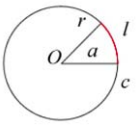
Formule di conversione:

$$\alpha^o : l = 360^o : 2\pi r$$

$$\alpha^o = \frac{360^o \cdot l}{2\pi r}$$

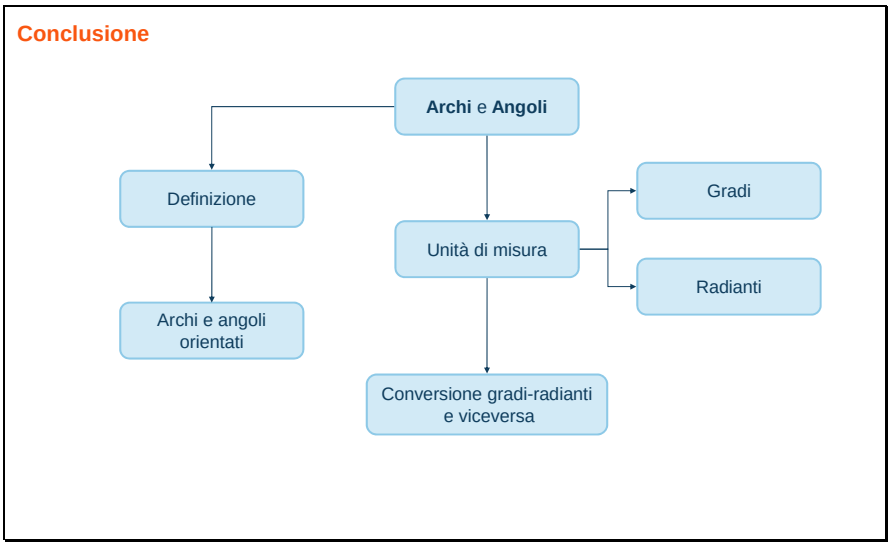
$$\alpha^o = \frac{360^o}{2\pi} = \frac{180^o}{\pi} = 57{,}29578^o = 1 rad$$

$$\frac{\alpha^o}{\alpha^{rad}} = \frac{360^o}{2\pi} \Rightarrow \alpha^o = \frac{360^o}{2\pi}\alpha^{rad} \qquad \alpha^{rad} = \frac{2\pi}{360^o}\alpha^o$$



Ora affrontiamo l'argomento delle formule di conversione, in particolare la trasformazione da gradi a radianti e viceversa.
Si prenda una circonferenza con centro nel vertice dell'angolo e il suo arco intercettato dalle due semirette che formano l'angolo.
Chiameremo ℓ la lunghezza di tale arco, r quella del raggio, c quella della circonferenza e α l'ampiezza dell'angolo.
Ricordando che la lunghezza di una circonferenza è $c=2\pi r$, impostiamo la seguente proporzione: $\alpha^o : l = 360^\circ : 2\pi r$.
Se consideriamo che un radiante è l'ampiezza dell'arco di circonferenza che, rettificato, è uguale al raggio della circonferenza stessa, possiamo affermare che un radiante è l'angolo che si ha in corrispondenza di un arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.
Dunque, ponendo $\ell=r$, dall'equazione precedente si ottiene: $\alpha^o=180^\circ/\pi$, ovvero $\alpha^o=57{,}29578^o=1$ rad.
Con la seguente proporzione si ottengono le formule per passare da gradi a radianti e viceversa: $\alpha^\circ \div \alpha^{rad} = 360^\circ \div 2\pi$.
E quindi: $\alpha^\circ = (360^\circ/2\pi)\,\alpha^{rad}$ e $\alpha^{rad} = (2\pi/360^\circ)\,\alpha^\circ$.

Note



In conclusione, in questa lezione abbiamo parlato di archi e angoli.
Abbiamo dapprima affrontato la definizione di angoli e archi precisando poi le caratteristiche di archi e angoli orientati.
Abbiamo quindi illustrato come misurare gli angoli introducendo le due unità di misura: il grado e il radiante.
Infine, abbiamo ricavato le formule per convertire le misure di un angolo da gradi a radianti e viceversa.