Matematica

Anno 3

Iperbole: definizione

Introduzione

In questa lezione descriveremo alcune caratteristiche dell'**iperbole**.

Al termine di questa lezione sarai in grado di:

- riconoscere l'equazione dell'iperbole
- individuare gli elementi notevoli dell'iperbole
- descrivere gli asintoti dell'iperbole

In questa lezione descriveremo alcune caratteristiche dell'iperbole.

Inizieremo dando la definizione di iperbole. Illustreremo poi, l'equazione che descrive questa curva piana. Daremo infine la definizione di fuochi, vertici, asintoti ed eccentricità.

Al termine di questa lezione sarai in grado di:

- riconoscere l'equazione dell'iperbole;
- individuare gli elementi notevoli dell'iperbole;
- descrivere gli asintoti dell'iperbole.

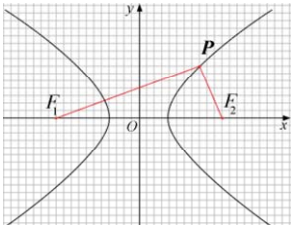
Definizione di iperbole

Che cos'è un'iperbole?

Un'**iperbole** è il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissati F_1 e F_2, detti **fuochi**.

Siano F_1 e F_2 i fuochi delle'iperbole. Per ogni punto P dell'iperbole si ha che:

$$|PF_2 - PF_1| = \text{costante}$$



Ma che cos'è un'iperbole?

Un'iperbole è il luogo geometrico dei punti del piano che hanno costante la differenza delle distanze da due punti fissati F_1 e F_2, detti fuochi.

Questo significa che preso un qualsiasi punto P appartenente all'iperbole, si verifica che $|PF_2 - PF_1|$=costante.

La figura mostra il grafico di un'iperbole; essa é una curva costituita da due rami distinti.

Note

Equazione di un'iperbole con i fuochi sull'asse x

L'equazione di un'iperbole avente i fuochi appartenenti all'asse x e simmetrici rispetto all'asse y è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$ Equazione **canonica** o **normale**

Le coordinate dei due **fuochi** sono $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, dove $c^2-a^2=b^2$ e quindi $a<c$. La quantità c è detta **semidistanza focale.**

Esempio:

Considerata l'iperbole avente equazione canonica: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

I coefficienti dell'equazione sono:

$a = 4 \quad b = 3 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \quad \Rightarrow \quad c = 5$

I fuochi sono: $F_1(-5,0) \qquad F_2(5,0)$

L'equazione di un'iperbole, i cui fuochi appartengono all'asse x e sono simmetrici rispetto all'asse y, è $x^2/a^2-y^2/b^2=1$.

Questa equazione è detta equazione canonica o normale dell'iperbole.

Dall'equazione dell'iperbole si possono ricavare le coordinate dei fuochi.

Infatti, $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, dove c è definita mediante la relazione $c^2-a^2=b^2$ e quindi è strettamente maggiore di a. c è detto semidistanza focale, dato che $2c$ è la distanza tra i due fuochi.

Facciamo adesso un esempio.

Consideriamo l'iperbole di equazione $x^2/16-y^2/9=1$

In quest'equazione a=4 e b=3.

Poiché $c^2=a^2+b^2$, ricaviamo $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+9} = 5$.

Quindi i due fuochi avranno coordinate $F_1(-5,0)$ e $F_2(5,0)$.

Vertici di un'iperbole con i fuochi sull'asse *x*

I **vertici reali** di un'iperbole sono i due punti d'intersezione tra la conica e la retta che congiunge i fuochi dell'iperbole.

Data l'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

i **vertici reali** sono i punti $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$.

I **vertici non reali** sono per definizione i punti $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$ e la retta passante per tali vertici è l'**asse non trasverso**.

Esempio:

Calcolare i vertici dell'iperbole $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Soluzione:

I vertici A_1 e A_2 sono i punti d'intersezione dell'iperbole con l'asse x, ovvero le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{16}=1\\ y=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\pm 4\\ y=0\end{cases}$$

I vertici reali dell'iperbole sono: $A_1(-4,0)$ $A_2(4,0)$

I vertici non reali dell'iperbole sono: $B_1(0,-3)$ $B_2(0,3)$

I vertici di un'iperbole sono i punti d'intersezione dell'iperbole la retta che congiunge i fuochi dell'iperbole. Tale retta prende il nome di asse trasverso.

Quindi, nel caso di un'iperbole con i fuochi sull'asse delle x, l'asse trasverso è proprio l'asse x.

Data un'iperbole di equazione $x^2/a^2-y^2/b^2=1$, i suoi vertici reali sono i punti $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$. Inoltre, si definiscono i vertici non reali dell'iperbole $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$ e la retta passante per tali punti è detta asse non trasverso. E' importante sottolineare che i vertici non reali non rappresentano l'intersezione dell'iperbole con l'asse delle y, dato che tale conica non incontra mai l'asse delle ordinate.

Riprendendo l'iperbole introdotta nell'esempio precedente, $x^2/16-y^2/9=1$, calcoliamo i vertici reali e non reali.

Risolviamo dunque il sistema formato dalle equazioni $x^2/16-y^2/9=1$ e $y=0$.

Sostituiamo nell'equazione dell'iperbole a y il valore zero.

Otteniamo così un'equazione di secondo grado pura, le cui soluzioni sono $x=\pm 4$.

I vertici reali A_1 e A_2 avranno dunque coordinate $A_1(-4,0)$ e e $A_2(4,0)$.

Infine, a partire dall'equazione dell'iperbole, determiniamo i suoi vertici non reali: $B_1(0,-3)$ e $B_2(0,3)$.

Eccentricità di un'iperbole con i fuochi sull'asse x

L'**eccentricità** di un'iperbole è il rapporto tra la distanza focale e la distanza tra i due vertici.
L'eccentricità di un'iperbole è un valore maggiore di 1 dato dalla formula

$$e = \frac{c}{a} > 1.$$

Esempio:

Calcolare l'eccentricità dell'iperbole $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$

Soluzione:

L'eccentricità è data da

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16+9}}{4} = \frac{5}{4}.$$

L'eccentricità di un'iperbole è il rapporto tra la distanza focale e la distanza tra i due vertici.

L'eccentricità di un'iperbole è un valore maggiore di 1 e si indica con *e*.

Per un'iperbole con i fuochi sull'asse *x* l'eccentricità vale $e=c/a$.

Calcoliamo ora l'eccentricità dell'iperbole $x^2/16-y^2/9=1$.

Applichiamo la formula $e=c/a$. Ricordando che $c=\sqrt{a^2+b^2}$, e sostituendo i valori di *a* e *b* si ottiene $e=5/4$.

Abbiamo così verificato che l'eccentricità dell'iperbole è un valore maggiore di 1.

Iperbole con i fuochi sull'asse y

L'equazione **canonica** di un'iperbole con i fuochi appartenenti all'asse y e simmetrici rispetto all'asse x è:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

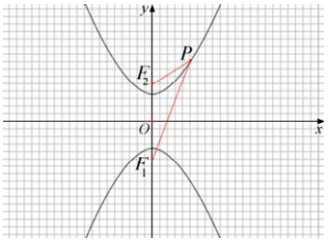
Equazione **canonica** o **normale**

Le coordinate dei **fuochi** sono $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$, dove $c^2-b^2=a^2$ e quindi $b<c$.

I **vertici reali,** ovvero i punti d'intersezione della conica con l'asse y, sono $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$ e l'**asse trasverso** è l'asse y.

I **vertici non reali** sono definiti come i punti $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$ e l'**asse non trasverso** è l'asse x.

L' **eccentricità** vale $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$.



In modo analogo a quanto detto per l'iperbole con i fuochi sull'asse x, si procede per l'iperbole con i fuochi sull'asse y.

L'equazione canonica di un'iperbole, i cui fuochi appartengono all'asse y e sono simmetrici rispetto all'asse x, è $x^2/a^2-y^2/b^2=-1$.

I fuochi hanno coordinate $F_1(0,-c)$ e $F_2(0,c)$, dove c è definita mediante la relazione $c^2-b^2=a^2$ e quindi $c>b$.

I vertici reali, ottenuti intersecando la conica con l'asse y, sono $B_1(0,-b)$ e $B_2(0,b)$ e l'asse trasverso è l'asse y.

I vertici non reali sono $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$ e l'asse non trasverso è l'asse x.

L'eccentricità ha la forma $e=c/b$. Ricordando che $c=\sqrt{b^2+a^2}$, $e=\frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$.

La figura mostra come si presenta un'iperbole di questo tipo.

Note

Esempio: iperbole con i fuochi sull'asse *y*

Esempio:

Consideriamo l'iperbole avente equazione canonica: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=-1.$

I coefficienti dell'equazione sono:

$a=4 \quad b=3 \Rightarrow c^2=a^2+b^2=16+9=25 \Rightarrow c=5$

I fuochi sono: $F_1(0,-5) \quad F_2(0,5)$

La sua eccentricità è data da $e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}=\frac{\sqrt{16+9}}{3}=\frac{5}{3}.$

I vertici non reali dell'iperbole sono: $A_1(-4,0) \quad A_2(4,0)$

I vertici reali B_1 e B_2 sono i punti d'intersezione dell'iperbole con l'asse *y*, ovvero le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\\ x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{y^2}{9}=1\\ x=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y=\pm 3\\ x=0\end{cases}$$

I vertici reali dell'iperbole sono: $B_1(0,-3) \quad B_2(0,3)$

Vediamo ora un esempio di iperbole con fuochi sull'asse *y*.

Consideriamo l'iperbole avente equazione $x^2/16-y^2/9=-1$.

In questo caso, i coefficienti dell'equazione sono: $a=4$ e $b=3$. Dalla relazione $c^2=a^2+b^2$, otteniamo $c=5$.

Conseguentemente, i fuochi dell'iperbole, che appartengono all'asse *y*, hanno coordinate (0,-5) e (0,5).

Ricordando la definizione di eccentricità, deduciamo che la conica considerata ha eccentricità uguale a 5/3.

Dall'equazione dell'iperbole, deduciamo che i vertici non reali sono $A_1(-4,0)$ e $A_2(4,0)$.

Calcoliamo infine i vertici dell'iperbole, trovando i suoi punti di intersezione con l'asse *y*. Risolvendo il sistema otteniamo che i vertici cercati sono $B_1(0,-3)$ e $B_2(0,3)$.

Asintoti di un'iperbole

Gli **asintoti** di un'iperbole sono le rette di equazione:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$ **rette** a cui l'iperbole si avvicina all'**infinito**

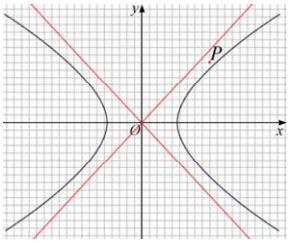
Esempi:

- Iperbole: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ➡ $a = 4, \quad b = 3$

  Asintoti: $y = \pm \frac{3}{4} x$

- Iperbole: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$ ➡ $a = 2, \quad b = 4$

  Asintoti: $y = \pm 2x$



Gli asintoti di un'iperbole sono le rette di equazione $y=\pm(b/a)x$.

Gli asintoti sono le rette a cui si avvicinano indefinitamente i rami dell'iperbole senza mai toccarle. Essi si possono anche definire come le tangenti all'iperbole all'infinito.

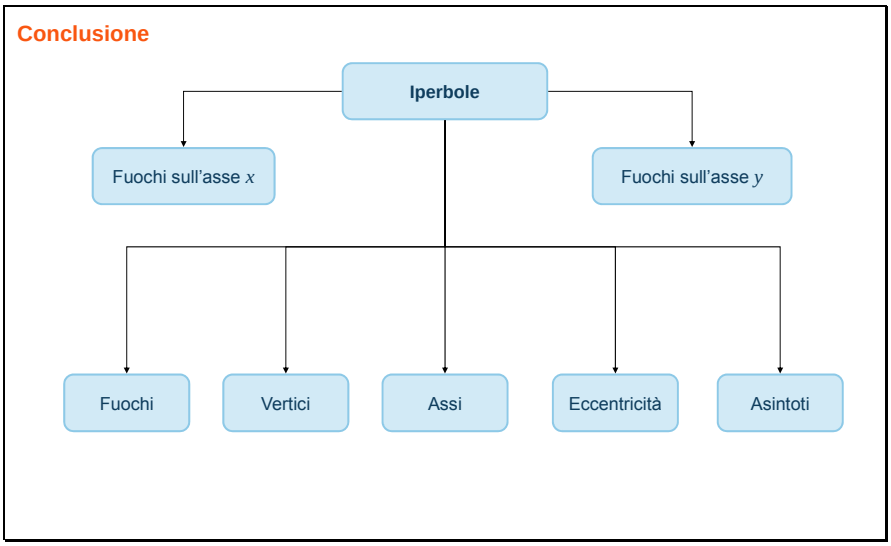
La figura mostra la rappresentazione grafica degli asintoti rispetto ad un'iperbole.

Facciamo ora qualche esempio, ricordando che la formula è valida sia per iperboli aventi i fuochi sull'asse x che per quelle aventi i fuochi sull'asse y.

L'iperbole $x^2/16-y^2/9=1$, ha $a=4$ e $b=3$. Applicando la formula si ottengono le equazioni degli asintoni $y=\pm 3/4x$.

Un altro esempio è dato dall'iperbole $x^2/4-y^2/16=-1$. Essa ha $a=2$ e $b=4$. Gli asintoti sono dunque le rette di equazioni $y=\pm 2x$.

Note



Concludendo, in questa lezione abbiamo dapprima definito l'iperbole e abbiamo distinto tra iperbole con i fuochi sull'asse *x* e iperbole con i fuochi sull'asse *y*. Per ognuna di queste tipologie abbiamo poi definito e calcolato:

- i fuochi
- i vertici
- gli assi
- l'eccentricità
- e gli asintoti.