Matematica

Anno 2

Teoremi sulle circonferenze (parte II)

Introduzione

In questa lezione esamineremo due importanti teoremi sulla circonferenza: il primo riguarderà una relazione tra un **angolo al centro** e un **angolo alla circonferenza** ad esso **corrispondente**, mentre il secondo sarà incentrato sulle **secanti** condotte da un punto esterno alla circonferenza.

Al termine della lezione sarai in grado di:

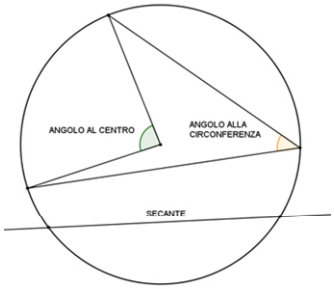
- dimostrare il teorema il teorema dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza
- dimostrare il teorema delle secanti di una circonferenza condotte per un punto esterno a essa

In questa lezione esamineremo due importanti teoremi sulla circonferenza: il primo riguarderà una relazione che sussiste tra un qualsiasi angolo al centro e un angolo alla circonferenza ad esso corrispondente; il secondo tratterà la relazione che lega i segmenti di secante che si possono condurre da un punto esterno alla circonferenza stessa.

Al termine della lezione sarai in grado di dimostrare sia il teorema dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza che il teorema delle secanti di una circonferenza condotte per un punto esterno ad essa.

Angoli e secanti

Ti ricordi cosa si intende per **angolo al centro** e **angolo alla circonferenza**? E quando una retta si dice **secante**?



Terminologie e definizioni:

- Data una circonferenza di centro C, si dice **angolo al centro** un qualsiasi angolo con centro in C
- Un angolo al centro divide la circonferenza in due **archi** sui quali si dice che l'angolo stesso **insiste**
- Si dice **angolo alla circonferenza** un qualsiasi angolo convesso con vertice sulla circonferenza i cui lati secano la stessa.
- Angolo al centro e angolo alla circonferenza si dicono **corrispondenti** se insistono sullo stesso arco
- Una retta si dice **secante** se ha due punti in comune con la circonferenza

Ti ricordi cosa si intende quando si parla di angolo al centro o di angolo alla circonferenza? Ti ricordi anche in quali casi una retta si dice secante rispetto a una circonferenza?

È il caso di aiutarsi con un disegno.

In matematica, come ben sai, è però importante dare delle definizioni precise, quindi è bene ricordare che:

Data una circonferenza di centro *C*, si dice angolo al centro un qualsiasi angolo avente centro in *C*. Ovviamente, due semirette con origine in *C* formano sempre due angoli al centro.

Un angolo al centro divide la circonferenza in due archi; si è soliti dire che l'angolo insiste sull'arco in esso contenuto.

Si dice angolo alla circonferenza un qualsiasi angolo convesso con vertice sulla circonferenza i cui lati secano la stessa.

Angolo al centro e angolo alla circonferenza si dicono corrispondenti se insistono sullo stesso arco.

Quanto alla retta, ricorda ancora che una retta si dice secante se ha due punti in comune con la circonferenza.

Teorema dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza

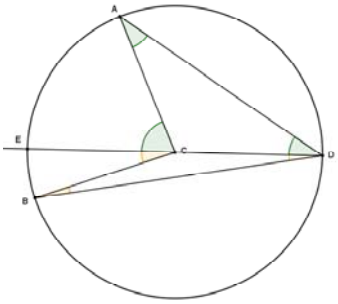
Un **angolo alla circonferenza** è la **metà** del corrispondente **angolo al centro**.

Ipotesi:

- $A\hat{D}B$ angolo alla circonferenza
- $A\hat{C}B$ angolo al centro corrispondente

Tesi:

- $A\hat{C}B \cong 2A\hat{D}B$



Ora possiamo enunciare il teorema dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza: "Un angolo alla circonferenza è la metà del corrispondente angolo al centro". Poiché tre punti formano sempre un triangolo, chiamiamo i vertici in senso orario per indicare gli angoli interni e in senso antiorario per indicare gli angoli esterni al triangolo (reale o immaginario che sia). Per esempio, con riferimento alla figura, nel centro *C*, *ACB* indicherà l'angolo convesso, mentre *BCA* indicherà l'angolo concavo.

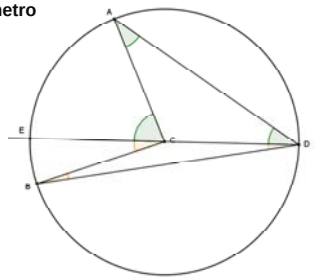
Le ipotesi del teorema sono quindi, sempre con riferimento alla figura, che *ADB* è un angolo alla circonferenza che insiste sull'arco *AB* e che *ACB* è il suo corrispondente angolo al centro.

La tesi che sosteniamo è che l'angolo al centro *ACB* è doppio dell'angolo al vertice corrispondente *ADB*.

Note

Dimostrazione del teorema

Dal vertice D tracciamo la semiretta per il centro C. DE è **diametro** della circonferenza. Consideriamo ora il triangolo CAD.



- CA e CD sono **raggi,** quindi il triangolo è **isoscele**

- $A\hat{D}C \cong C\hat{A}D$
- $A\hat{C}E$ è **angolo esterno** del triangolo CAD, quindi uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti

$$A\hat{C}E \cong 2A\hat{D}C$$

Ragionando analogamente sul triangolo BCD si ha: $E\hat{C}B \cong 2C\hat{D}B$

Sommando membro a membro i due risultati ottenuti: $A\hat{C}B \cong 2A\hat{D}B$

Facendo riferimento alla figura, dimostriamo ora il teorema. Dal vertice *D* tracciamo la semiretta per il centro *C*. Essa interseca in *E* la circonferenza, formando quindi il diametro *DE*. Il triangolo *CAD* che si viene a formare è isoscele sulla base *AD*, poiché *CA* e *CD* sono raggi della circonferenza.

Da questo segue che gli angoli alla base *ADC* e *CAD* sono congruenti. Inoltre, per il teorema dell'angolo esterno di un triangolo possiamo concludere che l'angolo *ACE* è la somma dei due angoli interni non adiacenti *ADC* e *CAD*.

Ne segue che l'angolo *ACE* è esattamente il doppio dell'angolo *ADC*.

Ragionando analogamente sul triangolo *BCD* si giunge alla conclusione che anche l'angolo *ECB* è il doppio di *CDB.*

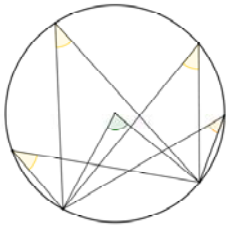
Sommando membro a membro i due risultati ottenuti si ha che l'angolo al centro è doppio rispetto all'angolo al vertice corrispondente.

Inoltre possiamo affermare che qualsiasi triangolo inscritto in una circonferenza è sicuramente rettangolo se un suo lato corrisponde al diametro della circonferenza.

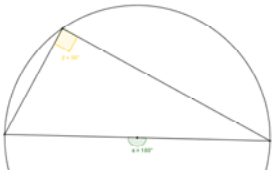
Corollari

Dal teorema dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza seguono due importanti **corollari**:

Corollario 1:
- Angoli alla circonferenza che insistono sullo **stesso arco** sono **congruenti**



Corollario 2:
- Ogni angolo alla circonferenza che insiste su una **semicirconferenza** è **retto**



Dal teorema dell'angolo al centro e dell'angolo alla circonferenza appena dimostrato seguono due importanti corollari.

Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti; infatti, ognuno di essi è congruente all'angolo al centro corrispondente che è unico per tutti. Per la proprietà transitiva, ogni angolo al vertice è quindi congruente a tutti gli altri che insistono sullo stesso arco.

Ogni angolo al vertice che insiste su una semicirconferenza è retto; infatti, se un angolo al vertice insiste su una semicirconferenza, l'angolo al centro corrispondente è un angolo piatto (e i lati dell'angolo formano un diametro della circonferenza). Poiché l'angolo al vertice deve essere la metà dell'angolo al centro, esso sarà esattamente di 90°.

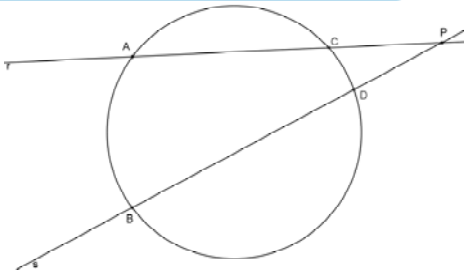
Teorema delle secanti

Con riferimento alla figura, chiamiamo PA e PB **segmenti di secante**, mentre PC e PD saranno la **parte esterna** dei segmenti di secante.

Teorema:
Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono due **secanti**, il **segmento di secante** di una e la sua **parte esterna** sono gli **estremi**, mentre il **segmento di secante** dell'altra e la sua **parte esterna** sono i **medi** di una **proporzione**.

Ipotesi:
- r, s secanti condotte da P
- PA, PB segmenti di secante
- PC, PD parti esterne

Tesi:
- $PA:PB=PD:PC$



Per poter enunciare il teorema delle secanti a una circonferenza condotte da un punto esterno ad essa è necessario introdurre una piccola notazione: con riferimento alla figura, chiamiamo *PA* e *PB* segmenti di secante, mentre *PC* e *PD* saranno detti parte esterna dei segmenti di secante.

Enunciamo dunque il teorema: "Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono due secanti, il segmento di secante di una e la sua parte esterna sono gli estremi, mentre il segmento di secante dell'altra e la sua parte esterna sono i medi di una proporzione."

Con riferimento alla figura a lato possiamo individuare le ipotesi:

r ed *s* sono due secanti condotte da *P*, punto esterno alla circonferenza;

PA e *PB* sono i segmenti di secante, mentre

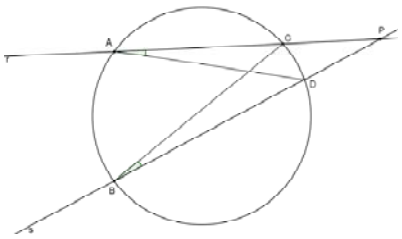
PC e *PD* sono le parti esterne dei segmenti di secante.

La tesi è che vale la proporzione *PA*:*PB*=*PD*:*PC*.

Dimostrazione del teorema

Si considerino i **triangoli** *APD* e *BPC*;
essi hanno:

- l'**angolo** $\hat{P}$ in comune
- gli **angoli** $D\hat{A}P \cong P\hat{B}C$, perché **angoli alla circonferenza** che insistono sullo **stesso arco** *CD*



I due **triangoli** risultano quindi **simili** per il primo criterio di similitudine.

Vale allora la relazione tra **lati corrispondenti**

$$PA:PB=PD:PC$$

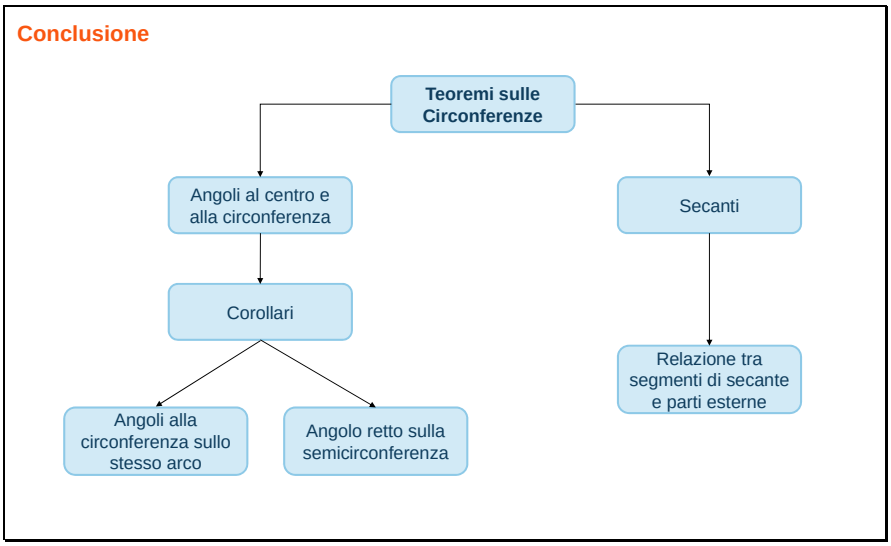
Con riferimento alla figura a destra procediamo con la dimostrazione.

Consideriamo i triangoli rettangoli *APD* e *BPC*. Essi hanno l'angolo in *P* in comune e gli angoli *DAP* e *PBC* congruenti, perché angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco *CD*.

Per il primo criterio di similitudine dei triangoli possiamo concludere che i due triangoli sono simili.

Vale allora la relazione tra lati corrispondenti esprimibile nella proporzione *PA*:*PB*=*PD*:*PC*.

Note



Facciamo un riepilogo di quanto appreso in questa lezione: la nostra attenzione si è soffermata su due importanti teoremi sulle circonferenze.

Il primo teorema riguarda la relazione tra angolo al centro e angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco, indicando che questi ultimi sono ampi la metà del loro angolo al centro corrispondente.

Da qui abbiamo visto che si possono dedurre due corollari.

Il primo corollario dice che tutti gli angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti.

Il secondo corollario afferma che qualsiasi triangolo inscritto in una semicirconferenza è rettangolo.

Infine, abbiamo enunciato e dimostrato il teorema delle secanti, che esprime la proporzione che lega due segmenti di secante e le rispettive parti esterne.