Matematica

Anno 2

Teoremi sulle circonferenze (parte I)

Introduzione

In questa lezione esamineremo due importanti teoremi sulla circonferenza: il primo riguarderà una proprietà delle sue **corde**, mentre il secondo sarà incentrato sulle **tangenti** condotte da un punto esterno ad essa.

Al termine della lezione sarai in grado di:

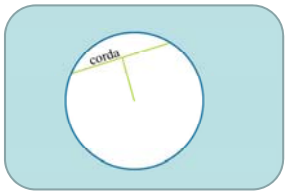
- dimostrare il teorema delle corde equidistanti dal centro
- dimostrare il teorema delle tangenti a una circonferenza condotte per un punto esterno a essa

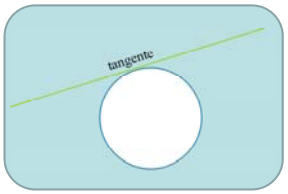
In questa lezione esamineremo due importanti teoremi sulla circonferenza: il primo riguarderà una proprietà delle corde in relazione alla loro distanza dal centro; il secondo tratterà i segmenti di tangente che si possono condurre da un punto esterno alla circonferenza stessa.

Al termine della lezione sarai in grado di dimostrare sia il teorema delle corde equidistanti dal centro che il teorema delle tangenti ad una circonferenza condotte per un punto esterno ad essa.

Corde e tangenti

Ti ricordi cos'è una **corda** di una circonferenza? E una **retta tangente** alla circonferenza?





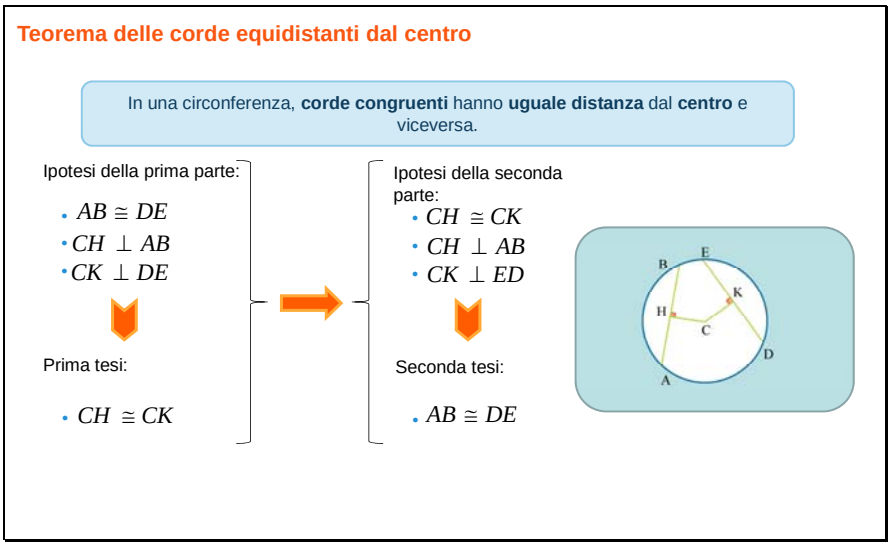
Terminologie:

- Si dice **corda** di una circonferenza un segmento che unisce due qualsiasi punti a essa appartenenti
- La **distanza** di una corda dal centro della circonferenza è la lunghezza del segmento di perpendicolare condotta dal centro alla corda stessa
- Una retta si dice **tangente** ad una circonferenza se ha con essa uno e un solo punto in comune

Ti ricordi cosa si intende quando si parla di corda di una circonferenza? Ti ricordi anche cos'è una retta tangente a una circonferenza?

Alcuni disegni possono aiutare a rinfrescare la memoria.

In matematica, come ben sai, è però importante dare delle definizioni precise, quindi è bene ricordare che: si dice corda di una circonferenza un segmento che unisce due qualsiasi punti a essa appartenenti. È inoltre importante ricordare che, quando parliamo di distanza di una corda dal centro della circonferenza, ci riferiamo alla lunghezza del segmento di perpendicolare condotta dal centro alla corda stessa. Infine, una retta si dice tangente ad una circonferenza se ha con essa uno e un solo punto in comune.



Ora possiamo enunciare il teorema delle corde equidistanti dal centro di una circonferenza:

“in una circonferenza, corde congruenti hanno uguale distanza dal centro e viceversa”. Cioè, se sappiamo che due corde sono equidistanti dal centro di una circonferenza, allora esse sono congruenti. Dimostreremo le due implicazioni separatamente, facendo tuttavia riferimento alla stessa figura sulla destra.

Le ipotesi della prima parte sono le seguenti: la corda *AB* è congruente alla corda *DE*; *CH* e *CK* sono perpendicolari, rispettivamente, ad *AB* e a *DE*, cioè sono le distanze delle due corde dal centro della circonferenza.

La tesi da dimostrare è proprio che *CH* è congruente a *CK*, cioè che le due corde sono equidistanti dal centro della circonferenza.

Nella seconda parte del teorema, invece, ipotizziamo che *CH* e *CK* siano segmenti congruenti e che essi siano la distanza delle corde dal centro della circonferenza.

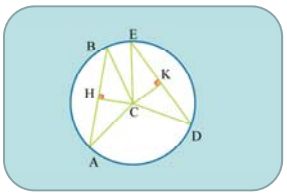
La tesi, questa volta, sarà la congruenza delle due corde *AB* e *DE*.

Teorema delle corde equidistanti dal centro: prima implicazione

Prima implicazione:

Si considerino i **triangoli isosceli** *ACB* e *DCE*; essi hanno:

- le **basi** *AB* e *DE* **congruenti** per ipotesi
- i **lati** *AC*, *BC*, *EC* e *DC* tutti **congruenti** perché raggi della circonferenza



I due **triangoli** risultano quindi **congruenti** per il terzo criterio di congruenza.

Di conseguenza anche i **segmenti** *CH* e *CK* sono **congruenti**, perché altezze dei due triangoli.

Facendo riferimento alla figura, dimostriamo la prima implicazione:

Consideriamo i triangoli isosceli *ACB* e *DCE*. Essi hanno:

- le basi *AB* e *DE* congruenti per ipotesi;
- i lati *AC*, *BC*, *EC* e *DC* tutti congruenti perché raggi della circonferenza.

Se ben ricordi, il terzo criterio di congruenza dei triangoli afferma che “due triangoli sono congruenti se hanno i tre lati rispettivamente congruenti”. In base a questo criterio i due triangoli considerati sono congruenti.

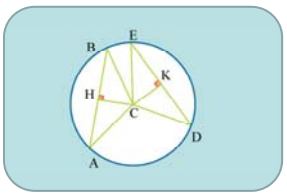
Di conseguenza essi avranno anche la stessa altezza che è rappresentata proprio dalle distanze *CH* e *CK*. Pertanto le due corde sono equidistanti dal centro della circonferenza.

Teorema delle corde equidistanti dal centro: seconda implicazione

Seconda implicazione:

Si considerino i **triangoli rettangoli** *ACH* e *DCK*; essi hanno:

- i **cateti** *CH* e *CK* **congruenti** per ipotesi
- le **ipotenuse** *AC* e *DC* **congruenti** perché raggi della circonferenza



I due **triangoli** risultano quindi **congruenti** per il criterio di congruenza particolare dei triangoli rettangoli.
Ragionando allo stesso modo si ottiene la congruenza dei triangoli *CHB* e *CKE*.

Di conseguenza i **segmenti** *AB* e *DE* sono **congruenti**, perché somma di segmenti rispettivamente congruenti.

Veniamo ora alla dimostrazione della seconda implicazione:

Consideriamo i triangoli rettangoli *ACH* e *DCK*; essi hanno:

- i cateti *CH* e *CK* congruenti per ipotesi;
- le due ipotenuse *AC* e *DC* congruenti, perché raggi della circonferenza.

Per il criterio di congruenza particolare dei triangoli rettangoli che afferma che due triangoli rettangoli, che hanno rispettivamente congruenti l'ipotenusa ed un cateto sono congruenti, i triangoli considerati risultano congruenti. Ragionando analogamente si può affermare che anche i triangoli *CHB* e *CKE* sono congruenti.

Di conseguenza, le corde *AB* e *DE* sono congruenti, perché somma dei segmenti *AH* più *HB* e *DK* più *KE* che sono rispettivamente congruenti.

Teorema delle tangenti

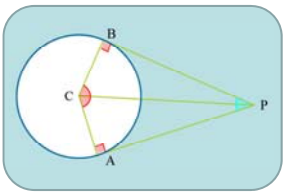
I **segmenti di tangente** condotti da un **punto esterno** alla circonferenza e compresi tra tale punto e i punti di contatto con la circonferenza stessa sono **congruenti**. Inoltre, la **congiungente** il punto esterno col centro della circonferenza è **bisettrice** sia dell'angolo formato dalle tangenti sia dell'angolo al centro avente come lati i raggi per i punti di tangenza.

Ipotesi:

- *PB* e *PA* segmenti di tangenti
- $CA \perp PA$
- $CB \perp PB$

Tesi:

- $PA \cong PB$
- $C\hat{P}A \cong C\hat{P}B$
- $P\hat{C}A \cong P\hat{C}B$



Veniamo adesso a enunciare il teorema delle tangenti a una circonferenza condotte da un punto esterno ad essa: "i segmenti di tangente condotti da un punto esterno alla circonferenza e compresi tra tale punto e i punti di contatto con la circonferenza stessa sono congruenti. Inoltre, la congiungente il punto esterno col centro della circonferenza è bisettrice sia dell'angolo formato dalle tangenti sia dell'angolo al centro avente come lati i raggi per i punti di tangenza.

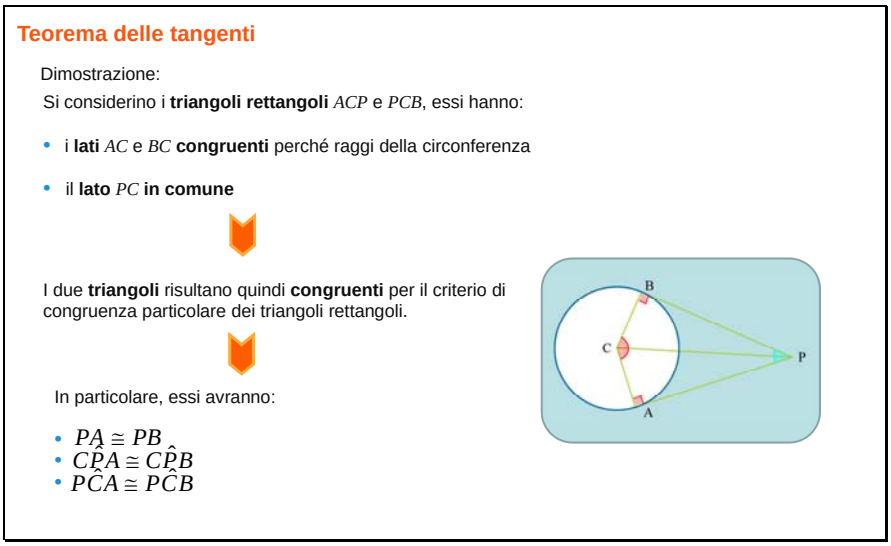
Facendo riferimento alla figura a destra possiamo individuare le ipotesi:

PA e *PB* sono i segmenti delle due rette tangenti che si possono condurre alla circonferenza dal punto ad essa esterno *P*.

CA e *CB* sono raggi della circonferenza e, in quanto tali, sono perpendicolari ai segmenti di tangente.

La tesi può essere suddivisa in tre parti:

- la congruenza dei segmenti di tangente;
- la proprietà di bisezione del segmento *PC* sull'angolo formato dalle tangenti;
- la proprietà di bisezione del segmento *PC* sull'angolo *ACB* formato dai due raggi.



Con riferimento alla figura a destra procediamo con la dimostrazione.

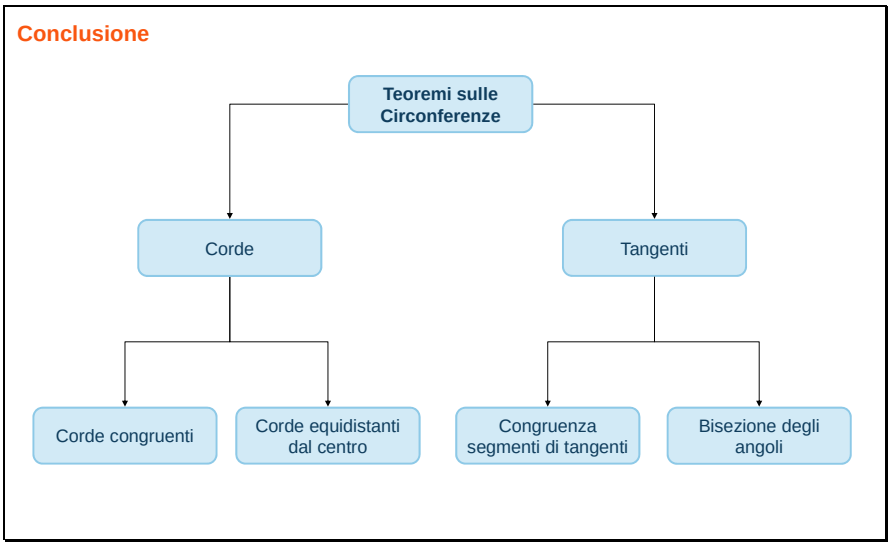
Consideriamo i triangoli rettangoli *ACP* e *PCB*. Essi hanno:

- i lati *AC* e *BC* congruenti perché raggi della circonferenza;
- il lato *PC* in comune.

Sempre per il criterio di congruenza particolare dei triangoli rettangoli, i due triangoli risultano quindi congruenti.

La congruenza si estende ad ogni elemento e quindi, in particolare, essi avranno:

- *PA* congruente a *PB*, cioè i due segmenti di tangente sono congruenti;
- l'angolo *CPA* congruente all'angolo *CPB*, cioè *CP* è bisettrice dell'angolo formato dalle tangenti;
- l'angolo *PCA* congruente a *PCB*, cioè *CP* è bisettrice dell'angolo formato dai due raggi.



Facciamo un riepilogo di quanto appreso in questa lezione: la nostra attenzione si è soffermata su due importanti teoremi sulle circonferenze.

Il primo teorema riguarda la lunghezza delle corde in relazione alla loro distanza dal centro.

In particolare, se due corde sono congruenti allora devono essere equidistanti dal centro.

Viceversa, se sappiamo che due generiche corde sono equidistanti dal centro, allora possiamo affermare che esse sono congruenti.

Il secondo teorema riguarda le tangenti condotte alla circonferenza da un punto esterno ad essa.

Abbiamo visto che i segmenti delle due tangenti compresi tra il punto esterno e i punti di contatto tra tangenti e circonferenza sono congruenti.

Inoltre, la congiungente il punto esterno col centro della circonferenza è bisettrice sia dell'angolo formato dalle due tangenti che dell'angolo formato dai due raggi per i punti di tangenza.