Matematica

Anno 1

Polinomi:
prodotti notevoli

Introduzione

In questa lezione introdurremo i **prodotti notevoli** vale a dire delle espressioni che occorre memorizzare poiché saranno uno degli strumenti essenziali per la **scomposizione** dei **polinomi**.

Al termine di questa lezione sarai in grado di:

- calcolare il quadrato e cubo del binomio e del trinomio
- semplificare alcune espressioni all'apparenza complesse

In questa lezione introdurremo i prodotti notevoli. Queste sono delle espressioni che occorre memorizzare in quanto saranno uno degli strumenti essenziali per la scomposizione dei polinomi.

Al termine di questa lezione sarai in grado di:

- calcolare il quadrato e il cubo di un binomio e di un trinomio;
- semplificare in termini di prodotti fra polinomi alcune espressioni all'apparenza complesse.

Quadrato di un binomio

Definizione: L'espressione $(a+b)^2$ è detta **quadrato** di un **binomio**.

Esempio di svolgimento:

Calcolare $(a+b)^2$

(1) Ovviamente $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)$

(2) Applicando le regole del prodotto di polinomi si ha:

$a^2+ab+ba+b^2$

(3) Osserviamo che ba e ab sono simili e quindi

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Il **quadrato** di un **binomio** è dato dalla somma dei quadrati dei due monomi che lo costituiscono più il doppio prodotto del primo per il secondo.

L'espressione $(a+b)^2$ è detta quadrato di un binomio.

Adesso svolgiamo il quadrato.

Osserviamo che $(a+b)^2=(a+b)\cdot(a+b)$.

Quindi applicando le regole del prodotto di polinomi si ha: $a^2+ab+ba+b^2$.

Osservando infine che ba e ab sono monomi simili si ottiene: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Possiamo riassumere quanto visto con la seguente regola: il quadrato di un binomio è dato dalla somma dei quadrati dei due monomi più il doppio prodotto del primo per il secondo.

Note

Cubo di un binomio

Definizione: L'espressione $(a+b)^3$ è detta **cubo** di un **binomio**.

Esempio di svolgimento:

Calcolare $(a+b)^3$

(1) Ovviamente $(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)^2$

(2) Applicando la regola del quadrato di un binomio si ha:

$(a+b)^3=(a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)$

(3) Eseguiamo il prodotto fra polinomi

$(a+b)^3=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$

(4) Sommando i termini simili si ottiene:

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Il **cubo** di un **binomio** è dato dalla somma dei cubi dei due monomi che lo costituiscono più il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo più il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo.

L'espressione $(a+b)^3$ è detta cubo di un binomio.

Svolgiamo adesso il cubo.

Ovviamente risulta che $(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)^2$.

Applicando la regola del quadrato di un binomio precedentemente introdotta si ha: $(a+b)^3=(a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)$.

Eseguiamo allora il prodotto fra polinomi $(a+b)^3=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$.

Infine sommando i termini simili si ottiene $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Possiamo riassumere quanto visto con la seguente regola: il cubo di un binomio è dato dalla somma dei cubi dei due monomi che lo costituiscono più il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, più il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo.

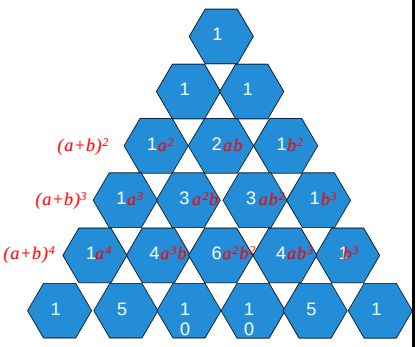
Note

Triangolo di Tartaglia

Il **triangolo** di **Tartaglia** è una tecnica matematica per il calcolo dei coefficienti per l'elevamento a potenza del binomio $(a+b)$, cioè per il calcolo di $(a+b)^n$.

Come funziona?

- Si costruisce un triangolo i cui primi tre elementi sono 1.
- Le celle successive (dall'alto verso il basso) hanno come valore la somma delle due celle che la sovrastano e a cui sono legate
- La terza riga mostra i coefficienti del quadrato del binomio (1,2,1) legati ad a^2, ab e b^2.
- La quarta quelli del cubo (1,3,3,1) legati a a^3, a^2b, ab^2 e b^3
- La quinta quelli di $(a+b)^4$ e cosi via.



Es: $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4a^2b^3+b^4$

Adesso introduciamo il triangolo di Tartaglia.

Il triangolo di Tartaglia è una tecnica matematica per calcolare i coefficienti dello sviluppo dell'espressione $(a+b)^n$.

La regola per costruirlo è semplice. Si parte da tre celle contenenti il numero 1 e poi si allungano verso il basso i vertici del triangolo sempre con celle aventi valore 1.

Poi si riempie il triangolo con celle aventi come valore numerico la somma dei numeri delle celle sovrastanti. Infatti per costruzione ogni cella confina con solo due celle sovrastanti. La parte letterale delle celle si ottiene osservando che il polinomio ottenuto è omogeneo e ordinato, in modo decrescente, rispetto ad *a* e, in modo crescente, rispetto a *b*.

La terza riga presenta i coefficienti dello sviluppo del quadrato del binomio.

La quarta dà i coefficienti del cubo del binomio.

La quinta riga dà i coefficienti di $(a+b)^4$.

La sesta invece dà quelli di $(a+b)^5$ e così via.

Note

Quadrato di un trinomio

Definizione: L'espressione $(a+b+c)^2$ è detta **quadrato** di un **trinomio**.

Esempio di svolgimento:

Calcolare $(a+b+c)^2$

(1) Ovviamente $(a+b+c)^2=(a+b+c)\cdot(a+b+c)$

(2) Applicando le regole del prodotto di polinomi si ha:

$a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$

(3) Osserviamo che: ba e ab; ac e ca; bc e cb sono simili. Si ha:

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Il **quadrato** di un **trinomio** è dato dalla somma dei quadrati dei tre monomi che lo costituiscono più il doppio prodotto del primo per il secondo, del primo per il terzo e del secondo per il terzo.

Introduciamo ora il quadrato di un trinomio.

L'espressione $(a+b+c)^2$ è detta quadrato di un trinomio.

Svolgiamo il quadrato: $(a+b+c)^2$.

Osserviamo che: $(a+b+c)^2=(a+b+c)\cdot(a+b+c)$.

Eseguiamo il prodotto fra polinomi e otteniamo: $a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$.

Osservando che ba e ab, ac e ca, bc e cb sono fra loro simili si ottiene: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

Possiamo riassumere quanto visto nella presente regola. Il quadrato di un trinomio è dato dalla somma dei quadrati dei tre monomi che lo compongono più il doppio prodotto del primo per il secondo, del primo per il terzo e del secondo per il terzo.

Quadrati e cubi di binomi e trinomi: schema riassuntivo

Formule riassuntive del quadrato e del cubo del binomio e del trinomio

	quadrato	cubo
$(a+b)$	$a^2+2ab+b^2$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)$	$a^2-2ab+b^2$	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b+c)$	$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$	$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$
$(a-b+c)$	$a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc$	$a^3-b^3+c^3-3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c-3bc^2-6abc$
$(a-b-c)$	$a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$	$a^3-b^3-c^3-3a^2b-3a^2c+3ab^2+3ac^2-3b^2c-3bc^2+6abc$

In questa pagina riassumiamo tutti i prodotti notevoli fin qui incontrati. Ovviamente il calcolo di alcuni di questi lo abbiamo affrontato nelle pagine precedenti; per gli altri prodotti lasciamo a voi l'impegno della dimostrazione tenendo presente che la strada da seguire è quella riportata negli esempi illustrati nelle pagine precedenti.

Altri prodotti notevoli

Esistono altri **prodotti notevoli** fra **polinomi** che ammettono forme particolarmente semplici.

Differenza di quadrati: $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$
Differenza di cubi: $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
Somma di cubi: $(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

Esempio di svolgimento:

Dimostrare $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(1) Effettuiamo il prodotto di polinomi:

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3$

(2) Sommando i termini simili si ottiene:

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

In questa pagina introduciamo altri prodotti notevoli che ci serviranno per la scomposizione o semplificazione dei polinomi.

In particolare illustriamo:

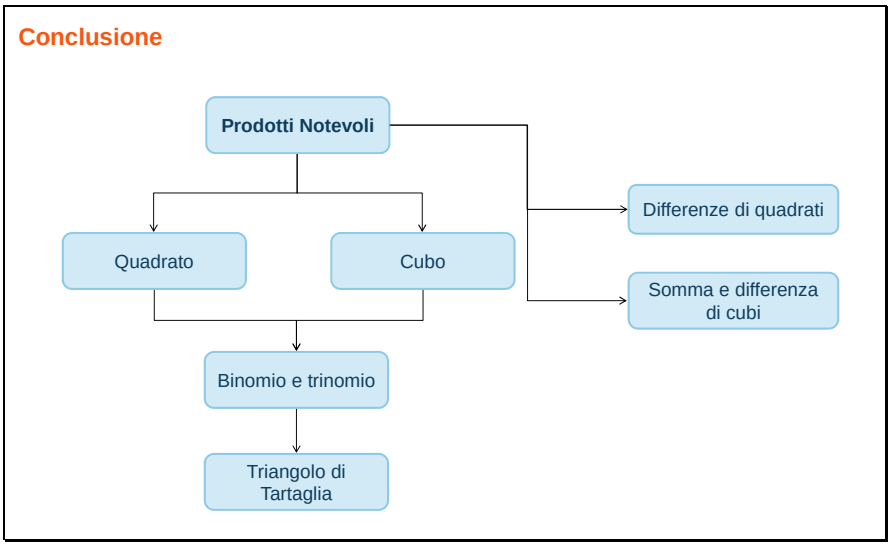
- la differenza di quadrati
- la differenza di cubi
- la somma di cubi

Svolgiamo a titolo di esempio la dimostrazione relativa alla differenza di due cubi.

Effettuiamo il seguente prodotto: $(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Sommando i monomi simili si ottiene: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

Note



Adesso ripercorriamo le tappe del nostro percorso.

Nell'insieme dei prodotti notevoli troviamo il quadrato ed il cubo, di un binomio oppure di un trinomio.

Abbiamo visto come calcolare espressioni più complesse, relative ai binomi, come $(a+b)^4$, utilizzando la tecnica del triangolo di Tartaglia.

Infine abbiamo introdotto la differenza di quadrati e la somma e differenza di cubi.