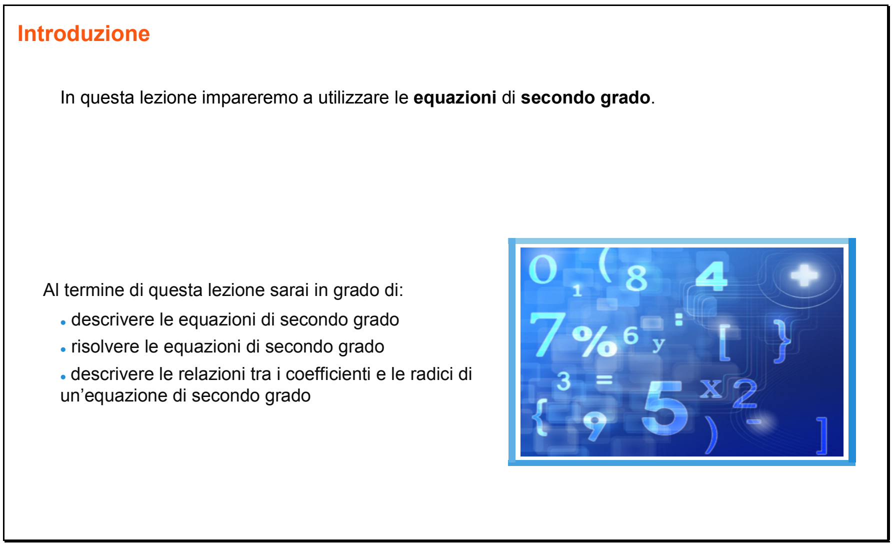
Matematica

Anno 2
Equazioni di secondo grado

RepetitaRepetita by Treccani.it



In questa lezione impareremo a utilizzare le equazioni di secondo grado.

Inizieremo dando la definizione di equazione di secondo grado. Illustreremo poi, quante e quali soluzioni può avere un’equazione di secondo grado e impareremo a risolverle.

Al termine di questa lezione sarai in grado di:

- descrivere le equazioni di secondo grado
- risolvere le equazioni di secondo grado
- descrivere le relazioni tra i coefficienti e le radici di un’equazione di secondo grado

Definizione di equazione di secondo grado

Che cos'è un'equazione di secondo grado?

Un'**equazione** di **secondo grado** è un'equazione algebrica in una sola variabile, di secondo grado.

Esempio:

$ax^2+bx+c=0 \qquad a\neq 0$

x **variabile**
a, b, c **coefficienti**

$a=1 \qquad b=-1 \qquad c=2$

$x^2-x+2=0$

Ma che cos'è un'equazione di secondo grado?

Un'equazione di secondo grado è un'equazione algebrica in una sola variabile. Tale variabile, che spesso viene indicata con x, compare con grado massimo pari a due.

Un'equazione di secondo grado avrà dunque la seguente forma $ax^2+bx+c=0$ con $a\neq 0$.

x è la variabile dell'equazione di secondo grado, mentre a, b e c sono i suoi coefficienti.

Nell'equazione generica $ax^2+bx+c=0$, sostituendo ad a il valore 1, a b il valore -1, a c il valore 2, otteniamo la seguente equazione $x^2-x+2=0$.

Equazioni di secondo grado complete

Un’equazione di secondo grado si dice **completa** quando tutti i suoi coefficienti, a, b e c sono diversi da zero.

Per risolvere un’equazione di secondo grado **completa** $ax^2+bx+c=0$
bisogna usare la seguente **formula risolutiva**:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Delta=b^2-4ac$$

Un’equazione di **secondo** grado, per il teorema fondamentale dell’algebra, nell’insieme dei numeri complessi C, **ha sempre due soluzioni**, eventualmente coincidenti.

Nell’insieme dei numeri reali, invece, può avere due soluzioni distinte, due soluzioni coincidenti o nessuna soluzione.

Un’equazione di secondo grado si dice completa quando tutti i suoi coefficienti, a, b e c sono diversi da zero.

Illustriamo ora come si fa a risolvere questo tipo di equazioni.

Per risolvere un’equazione di secondo grado completa bisogna usare la seguente formula risolutiva: $x=[-b\pm(\sqrt{b^2}-4ac)]/2a$.

Il termine sotto la radice quadrata si chiama discriminante e si indica con Δ. Esso è uguale a b^2-4ac.

La formula ci suggerisce che un’equazione di secondo grado ha, generalmente, due soluzioni (si noti il segno più o meno davanti alla radice quadrata).

In realtà, bisogna distinguere due casi, a seconda che l’equazione venga studiata nell’insieme dei numeri reali o nell’insieme dei numeri complessi.

Infatti, un’equazione di secondo grado, per il teorema fondamentale dell’algebra, nell’insieme dei numeri complessi C, ha sempre due soluzioni, eventualmente coincidenti.

Nell’insieme dei numeri reali, invece, può avere due soluzioni distinte, due soluzioni coincidenti o nessuna soluzione.

Soluzioni di un'equazione di secondo grado in *R*

Esempio:

$\Delta = b^2 - 4ac$ $\qquad$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta > 0$	Due soluzioni reali e distinte
$\Delta = 0$	Due soluzioni reali e coincidenti
$\Delta < 0$	Nessuna soluzione reale

Esaminiamo ora il legame tra il segno di Δ e il numero di soluzioni di un'equazione di secondo grado, nell'insieme dei numeri reali *R*.

Ricordando che Δ è uguale a b^2-4ac, e che nella formula risolutiva x=[-b±(√Δ)]/2a, bisogna estrarre la radice di Δ, esaminiamo i tre casi: Δ>0, Δ=0, Δ<0.

Se Δ>0, l'equazione di secondo grado avrà due soluzioni reali e distinte.

Se Δ=0, l'equazione di secondo grado avrà due soluzioni reali e coincidenti.

Se Δ<0, l'equazione di secondo grado non avrà nessuna soluzione.

Risoluzione di un'equazione di secondo grado completa

Risolviamo la seguente equazione:

Esempio:

$x^2-5x+6=0$

$a=1 \qquad b=-5 \qquad c=6$

Ricordiamo che la formula risolutiva è la seguente:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Applicandola avremo:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(6)}}{2(1)}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}$$

$x_1=(5-1)/2=2 \qquad x_2=(5+1)/2=3$

Risolviamo ora la seguente equazione di secondo grado completa x^2-5x+6=0.

Osserviamo che i coefficienti dell'equazione sono *a*, *b* e *c*.

Ricordiamo che la formula risolutiva è $x=[-b\pm(\sqrt{b^2}-4ac)]/2a$

Applicandola avremo $x=[-(-5)\pm(\sqrt{(-5)^2}-4(1)(6)]/2$. Svolgendo i calcoli avremo $x=(5\pm1)/2$.

Separando le due soluzioni, scegliendo prima il segno meno e poi il segno più, otteniamo $x_1=2$ e $x_2=3$.

Formula risolutiva ridotta

La **formula risolutiva ridotta** si usa per risolvere equazioni di secondo grado complete in cui il coefficiente b è un numero pari.

Se il coefficiente b è pari, si potrà scrivere $b = 2\beta$

L'equazione di secondo grado **completa** diventerà:

$ax^2 + 2\beta x + c = 0$

Si potrà, dunque, usare la seguente formula risolutiva ridotta:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - ac}}{a} \qquad \frac{\Delta}{4} = \beta^2 - ac$$

La formula risolutiva ridotta si usa per risolvere equazioni di secondo grado complete in cui il coefficiente b è un numero pari.
Dire che il coefficiente b è pari, significa che b si potrà scrivere come $b=2\beta$.
L'equazione di secondo grado si potrà dunque scrivere come $ax^2+ 2\beta x+c=0$.
Si potrà, dunque, usare la seguente formula risolutiva ridotta:
$x=[-\beta\pm(\sqrt{\beta^2-ac})]/a$ con $\Delta/4= \beta^2-ac$.

Equazioni di secondo grado incomplete

Un'equazione di secondo grado si dice **incompleta** quando manca uno o più di uno dei suoi coefficienti. Un'equazione **incompleta** può essere:

- **Monomia**
- **Pura**
- **Spuria**

Equazioni monomie:

$ax^2+bx+c=0$

$b=c=0 \rightarrow ax^2=0 \rightarrow x_1=x_2=0$

Equazioni pure:

$ax^2+bx+c=0$

$b=0 \rightarrow ax^2+c=0 \rightarrow ax^2=-c \rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Equazioni spurie:

$ax^2+bx+c=0$

$c=0 \rightarrow ax^2+bx=0 \rightarrow x(ax+b)=0 \rightarrow x_1=0 \quad x_2=-\frac{b}{a}$

Definiamo ora le equazioni di secondo grado incomplete.

Un'equazione di secondo grado si dice incompleta quando manca uno o più di uno dei suoi coefficienti. Un'equazione incompleta può essere monomia, pura o spuria.

Vediamone alcuni esempi.

Le equazioni monomie sono quelle in cui $b=c=0$.

Sostituendo nell'equazione $ax^2+bx+c=0$ a b e a c il valore 0, otteniamo $ax^2=0$.

Per la legge dell'annullamento del prodotto, poiché $a\neq0$, deve essere necessariamente $x=0$. Dunque, le equazioni monomie avranno le due soluzioni coincidenti, dette anche soluzione doppia, $x=0$.

Le equazioni pure sono quelle in cui $b=0$.

Sostituendo nell'equazione $ax^2+bx+c=0$ a b il valore 0, otteniamo $ax^2+c=0$.

Sommando $-c$ ad entrambi i membri otteniamo $ax^2=-c$.

Dividendo per a, si ha, $x^2=-c/a$ ed estraendo la radice quadrata si ottengono le due soluzioni opposte $x_1=\sqrt{(-c/a)}$ e $x_2=-\sqrt{(-c/a)}$.

Le equazioni spurie sono quelle in cui $c=0$.

Sostituendo nell'equazione $ax^2+bx+c=0$ a c il valore 0, otteniamo $ax^2+bx=0$.

Raccogliendo la x, si ha $x(ax+b)=0$.

Per la legge dell'annullamento del prodotto, si ottengono le due soluzioni $x_1=0$ e $x_2=-b/a$.

Relazioni tra radici e coefficienti di un'equazione di secondo grado

In un'equazione di secondo grado, esistono due relazioni importanti che legano i coefficienti dell'equazione alle sue radici.

Esempio:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

In un'equazione di secondo grado, esistono due relazioni importanti che legano i coefficienti dell'equazione alle sue radici.

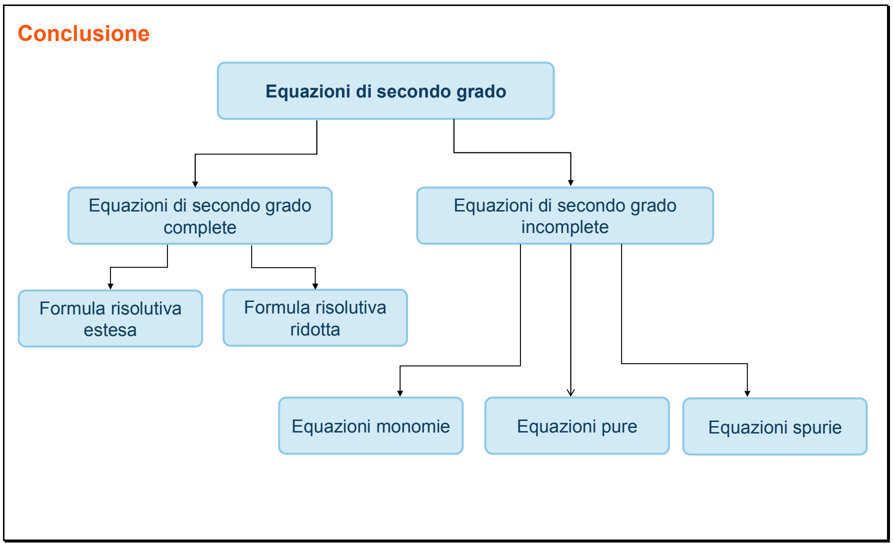
Queste relazioni riguardano la somma e il prodotto delle radici dell'equazione.

Si può infatti dimostrare che la somma delle radici è uguale a $-b/a$, mentre il prodotto delle radici è c/a.

Ricordando che le due radici sono uguali a $x_1=[-b-(\sqrt{b^2-4ac})]/2a$ e $x_2=[-b+(\sqrt{b^2-4ac})]/2a$

Sommando le due radici si ha: $[-b-(\sqrt{b^2-4ac})]/2a + [-b+(\sqrt{b^2-4ac})]/2a$,semplificando e sommando si ottiene $x_1+x_2=-b/a$.

Moltiplicando invece le due radici si ha: $[-b-(\sqrt{b^2-4ac})]/2a \cdot [-b+(\sqrt{b^2-4ac})]/2a$,semplificando e sommando si ottiene $x_1 \cdot x_2=c/a$.



Concludendo, in questa lezione abbiamo dapprima definito le equazioni di secondo grado.

Abbiamo poi distinto tra equazioni di secondo grado complete e incomplete.

Abbiamo fornito due formule risolutive per le equazioni di secondo grado complete, la formula estesa e la formula ridotta.

Abbiamo poi classificato le equazioni di secondo grado incomplete in equazioni monomie equazioni pure e infine equazioni spurie.